

Exercice 1

Soit α un nombre réel tel que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

1. Quelle est la valeur de $\cos(\alpha)$ si $\alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$?
2. Quelle est la valeur de $\cos(\alpha)$ si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$?

Exercice 2

Soit α un nombre réel tel que $\cos(\alpha) = \frac{3}{4}$.

1. Quelle est la valeur de $\sin(\alpha)$ si $\alpha \in [-\pi ; 0]$?
2. Quelle est la valeur de $\sin(\alpha)$ si $\alpha \in [0 ; \pi]$?

Exercice 3

Soit α un nombre réel appartenant à $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

La valeur exacte de $\sin(\alpha)$ est $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$.

1. Calculez la valeur exacte de $\cos(\alpha)$.
2. Donnez sans justification les valeurs exactes de $\cos(\pi - \alpha)$ et $\sin(\pi + \alpha)$.

Exercice 4

Soit α un nombre réel appartenant à $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

La valeur exacte de $\sin(\alpha)$ est $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{5}$.

1. Calculez la valeur exacte de $\cos(\alpha)$.
2. Donnez sans justification les valeurs exactes de $\cos(\pi - \alpha)$ et $\sin(\pi + \alpha)$.

Exercice 5

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3-\sqrt{6}}}{7}$.

1. Déterminer $\cos(\alpha)$ en détaillant tous les calculs.
2. Sans nouveau calcul donner $\cos(\pi + \alpha)$ en illustrant votre réponse sur le cercle trigonométrique.

Exercice 6

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{6}-2}}{3}$.

1. Déterminer $\sin(\alpha)$ en détaillant tous les calculs.
2. Sans nouveau calcul donner $\cos(\pi + \alpha)$ en illustrant votre réponse sur le cercle trigonométrique.

Solution 1

On sait que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ donc :

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 &= 1 \iff \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{5}{9} \\ &\iff \cos^2(\alpha) = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

1. Si $\alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(\alpha) \geq 0$, donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.
2. Si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, alors $\cos(\alpha) \leq 0$, donc $\cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$.

Solution 2

On sait que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ donc :

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \sin^2(\alpha) &= 1 \iff \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{16} \\ &\iff \sin^2(\alpha) = \frac{7}{16}\end{aligned}$$

1. Si $\alpha \in [-\pi ; 0]$, alors $\sin(\alpha) \leq 0$, donc $\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.
2. Si $\alpha \in [0 ; \pi]$, alors $\sin(\alpha) \geq 0$, donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Solution 3

1. On a la relation :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

En remplaçant $\sin(\alpha)$ par la valeur donnée il vient :

$$\cos^2(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}\right)^2 = 1$$

Donc :

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{16 - (2+\sqrt{3})}{16} \\ &= \frac{16 - 2 - \sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{14 - \sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{14 - \sqrt{3}}{16} \iff \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{14 - \sqrt{3}}}{4} \text{ ou } \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{14 - \sqrt{3}}}{4}.$$

$$\text{Comme } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]; \cos(\alpha) \leq 0, \text{ par conséquent } \cos(\alpha) = \boxed{-\frac{\sqrt{14 - \sqrt{3}}}{4}}.$$

$$2. \quad \bullet \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) = \boxed{\frac{\sqrt{14 - \sqrt{3}}}{4}}$$

$$\bullet \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha) = \boxed{-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4}}.$$

Solution 4

1. On a la relation :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

En remplaçant $\sin(\alpha)$ par la valeur donnée il vient :

$$\cos^2(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{5}\right)^2 = 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) &= 1 - \left(\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{5}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{25 - (3 + \sqrt{5})}{25} \\ &= \frac{25 - 3 - \sqrt{5}}{25} \\ &= \frac{22 - \sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{22 - \sqrt{5}}{25} \iff \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{22 - \sqrt{5}}}{5} \text{ ou } \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{22 - \sqrt{5}}}{5}.$$

$$\text{Comme } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]; \cos(\alpha) \leq 0, \text{ par conséquent } \cos(\alpha) = \boxed{-\frac{\sqrt{22 - \sqrt{5}}}{5}}.$$

$$2. \quad \bullet \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) = \boxed{\frac{\sqrt{22 - \sqrt{5}}}{5}}$$

$$\bullet \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha) = \boxed{-\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{5}}.$$

Solution 5

1. On sait que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ par conséquent :

$$\cos^2(\alpha) + \left(\frac{\sqrt{5}\sqrt{3 - \sqrt{6}}}{7}\right)^2 = 1 \iff \cos^2(\alpha) + \frac{5(3 - \sqrt{6})}{49} = 1$$

$$\iff \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{15 - 5\sqrt{6}}{49}$$

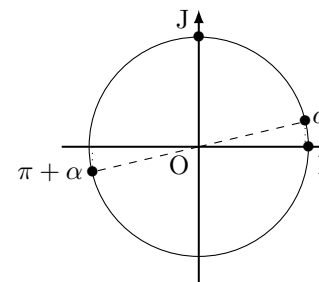
$$\iff \cos^2(\alpha) = \frac{49 - 15 + 5\sqrt{6}}{49}$$

$$\iff \cos^2(\alpha) = \frac{34 + 5\sqrt{6}}{49}$$

$$\text{Donc } \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{34 + 5\sqrt{6}}}{7} \text{ ou } \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{34 + 5\sqrt{6}}}{7}.$$

$$\text{Comme } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(\alpha) \geq 0, \text{ par conséquent } \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{34 + 5\sqrt{6}}}{7}.$$

$$2. \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \text{ donc } \cos(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{34 + 5\sqrt{6}}}{7}.$$



Solution 6

1. On sait que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ par conséquent :

$$\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{6} - 2}}{3}\right)^2 + \sin^2(\alpha) = 1 \iff \frac{2(\sqrt{6} - 2)}{9} + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\iff \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{2\sqrt{6} - 4}{9}$$

$$\iff \sin^2(\alpha) = \frac{9 - 2\sqrt{6} + 4}{9}$$

$$\iff \sin^2(\alpha) = \frac{13 - 2\sqrt{6}}{9}$$

$$\text{Donc } \sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{13 - 2\sqrt{6}}}{3} \text{ ou } \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{13 - 2\sqrt{6}}}{3}$$

Comme $\alpha \in [0 ; \pi]$, $\sin(\alpha) \geq 0$, par conséquent $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{13 - 2\sqrt{6}}}{3}$.

2. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ donc $\cos(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{6} - 2}}{3}$.

